Computeralgebra Das Ende des herkömmlichen Mathematikunterrichts?

Günter Hanisch

1 Einleitung

Durch Jahrhunderte hindurch waren die Hilfsmittel, die dem Mathematikunterricht zur Verfügung standen, bescheiden: Schreib- und Zeichengeräte, wie Füllfeder, Bleistift, Papier, Dreiecke, Winkelmesser und Zirkel, ein Logarithmenbuch und bisweilen ein Rechenstab. Keine teuren Geräte wie in Physik, keine großartigen Sammlungen wie in Biologie.

Seit etwa 25 Jahren begann die Mikroelektronik ihren Einzug in die Schulen, vorerst in Gestalt der damaligen Groß-EDV, Computern, wie etwa der IBM 1400 Serie, die die enorme Speicherkapazität von 4 kByte hatten. Vorreiter war in Österreich das berufsbildende Schulwesen, das damals bereits Einschulungskurse für Lehrkräfte veranstaltete. Die Schüler(innen), die am Unterricht in Elektronischer Datenverarbeitung teilnahmen, mußten allerdings mit ihren Lehrkräften zu den Computern hinfahren, da ein Gerät für jede Schule viel zu teuer gekommen wäre.

Die weitere Entwicklung kennen Sie. Heute ist einerseits der Taschenrechner ein nicht mehr wegzudenkender Teil des Mathematikunterrichts, andererseits lernen im Informatikunterricht unsere Schüler(innen) Computer benutzen, die mehr als das Hundertfache der Speicherkapazität jener Geräte besitzen, die anfangs ihren Eingang in den Schulunterricht gefunden hatten.

Wie wird die Entwicklung der Mikroelelektronik weitergehen? Univ. Prof. Dr. SCHAUER stellte bei einem Vortrag im Frühjahr 1990, in dem er sich mit den Computern des Jahres 2000 beschäftigte, folgendes Scenario vor: die Zukunft wird bei einem Gerät in der Form einer Platte in der Größe einer A4-Seite liegen, das einen berührungsempfindlichen Bildschirm haben wird, auf dem man mit einem Stift oder dem Finger schreiben wird. Die verschiedenen Computer verständigen sich untereinander mittels Infrarot und bauen selbständig ein Netz auf. Anstelle der Disketten werden von einem Laser abtastbare Karten in Scheckkartengröße verwendet werden.

Was heißt das für den Mathematikunterricht? Unsere Schüler(innen) werden in 10 Jahren anstatt der Taschenrechner Computer verwenden, die ein Vielfaches der Rechner- und Speicherkapazität der jetzigen PCs haben werden. Auch die Software wird wesentlich umfangreicher und leichter benützbar sein, als dies heute üblich ist.

Im Folgenden möchte ich einen Aspekt herausgreifen, nämlich den der Computeralgebra, und auf die Auswirkungen derselben auf den künftigen Mathematikunterricht eingehen.

2 Computeralgebra

Die grundlegende Idee der Computeralgebra-Programme ist die: Elektronische *Daten*verarbeitungsgeräte funktionieren nach folgendem Schema (siehe Abbildung 1):

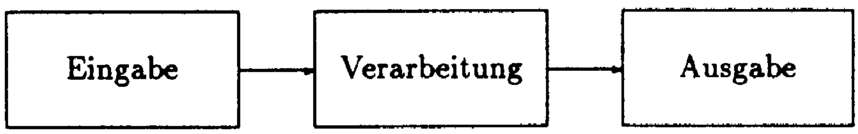

Abbildung 1: Schema der EDV

Dabei können nicht nur Zahlen, sondern auch Buchstabenkombinationen[1] Gegenstände der Eingabe sein, also beispielsweise $5x + 2x$. Ausgabe soll dann $7x$ sein, was schon ein einfaches BASICprogramm leisten könnte. Und auf dieser Idee sind die Computeralgebra-Programme aufgebaut, von denen es bereits mehrere gibt, die unterschiedliches Können aufweisen. Die wichtigsten sind in Tabelle 1 angeführt, der die Übersicht von KENNETH u.a. 1989, S. 243 zugrunde gelegt wurde. Dabei wurde die jeweilige Grundversion betrachtet und nicht diverse Zusätze. So gibt es etwa für mu-Math eine Erweiterung, die Grafik gestattet.

Als ein Beispiel, was solche Programme können – „a few thousand years of mathematical knowledge suddenly arrive on the desktop, and we journey through a strange and wonderful new world“ (FINN 1988, S. 199) –, möchte ich DERIVE (1988), den Nachfahren von muMATH (1983; siehe WOOFF u. HODKINSON 1988) heranziehen, obwohl es wesentlich weniger mächtig als die meisten der anderen Programme ist, da dieses einerseits an die Hardware nur geringe Anforderungen stellt, andererseits in der Benutzeroberfläche für ein Programm aus der MS-DOS-Welt hervorragend und hoffentlich beispielgebend für die anderen Programme ist

[1] Man spricht von alphamerischen Zeichen.

Mathematische Operationen	mu-Math	De-rive	Mac-syma	Map-le	Mathe-matica	Re-duce
Differenzieren u. Integrieren	+	+	+	+	+	+
Matrizenrechnung	+	+	+	+	+	+
Lineare Gleichungssysteme	+	+	+	+	+	+
Nichtlin. Gleichungssysteme			+	+		
Gewöhnl. Differentialgleichg.	+		+	+		
Vektorgleichungen			+	+	+	
LAPLACE-Transformation			+	+	+	
Inverse LAPLACE-Transf.			+	+		
Ausgabe in Programmierspr.		+	+	+	+	+
PC tauglich	+	+		+	+	+
2-dimensionale Grafik		+	+	+	+	
3-dimensionale Grafik		+	+		+	

Tabelle 1: KENNETH u.a. 1989 (modifiziert): Computeralgebra-Programme

und schließlich auch vom Preis her erschwinglich ist, so daß viele Schulen es bereits erworben haben.

Einige Beispiele sollen zeigen, was DERIVE kann:

Bsp.: Die Eingabe von `2(8+7)/3^2`
bewirkt am Bildschirm die Ausgabe:

$$\frac{2(8+7)}{3^2}$$

Der Befehl „Vereinfache“ bewirkt dann die eigentliche Rechenoperation:

$$\frac{10}{3}$$

Es wird also in exakter Arithmetik gerechnet (es werden daher auch Wurzeln nicht näherungsweise bestimmt). Selbstverständlich kann das Programm aber veranlaßt werden, $\frac{10}{3}$ näherungsweise zu berechnen. Die Ausgabe ist dann 3.33333 (die Anzahl der Dezimalstellen kann festgelegt werden).

Bsp.: Das Bruchrechnen geht auch mit Variablen: `2x/(x^2-1)-1/(x-1)`
liefert

$$\frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x-1},$$

was vereinfacht

$$\frac{1}{x+1}$$

ergibt.

Bsp.: `x^2+3ax=10a^2`
ergibt durch den Befehl „Löse" die beiden Gleichungen

$$
\begin{aligned}
x &= 2a \\
x &= -5a
\end{aligned}
$$

Bsp.: Aber auch Differenzieren und Integrieren wird beherrscht: Gibt man
`int(x/(x^3-1),x))`
ein, so erhält man am Bildschirm die Ausgabe:

$$\int \frac{x}{x^3-1}\,dx$$

Der Befehl „Vereinfache" liefert:

$$\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{atan}\left[\frac{2\sqrt{3}x}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right]}{3}-\frac{\ln(x^2+x+1)}{6}+\frac{\ln(x-1)}{3}$$

Durch Differenzieren wiederum ergibt sich:

$$\frac{x}{(x^2+x+1)(x-1)},$$

was vereinfacht wieder den Ausgangsterm liefert:

$$\frac{x}{x^3-1}$$

Bsp.: `z=-y/(9+x^2+y^2)` soll grafisch dargestellt werden. Das Ergebnis zeigt Abbildung 2.

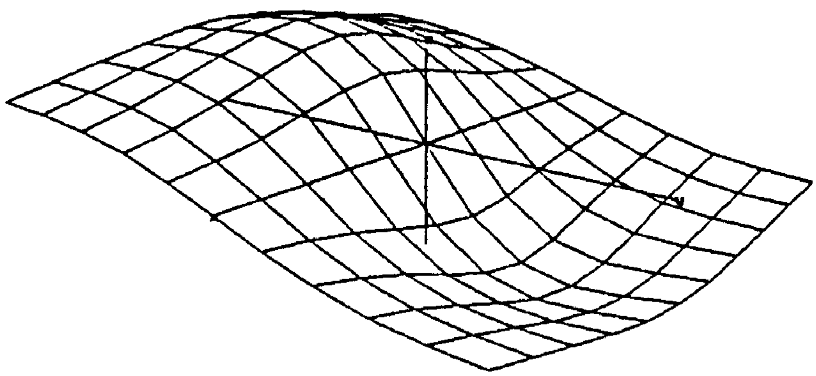

Abbildung 2: DERIVE-Grafik

Allerdings sind in DERIVE nicht nur weniger mathematische Operationen eingebaut (siehe Tabelle 1), sondern es scheitert bereits früher als die meisten anderen Programme für Computeralgebra. Zwei Beispiele mögen dies zeigen:

Bsp. 1: Einerseits hat DERIVE Schwierigkeiten beim Vereinfachen hyperbolischer Funktionen[2]:

$$Re\left[\coth\left(\frac{u+iv}{2}\right)\right]$$

ergibt

$$\frac{(e^u - e^{-u}) \cdot [e^{2u} + 4\cos v\, e^u + 4\cos v\, e^{-u} + e^{-2u} + 2\,(2\cos v^2 + 1)]}{[e^{2u} + e^{-2u} + 2\,(2\sin v^2 - 1)] \cdot (e^u + e^{-u} + 2\cos v)}$$

MACSYMA hingegen liefert als Ergebnis

$$x = \frac{\sinh u}{\cos v - \cosh v}$$

Bsp. 2: Andererseits scheitert DERIVE bei schwierigeren Problemen, wie etwa der Berechnung von

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2+1}\, dx,$$

was etwa MATHEMATICA (siehe WOLFRAM[3] 1988) lösen kann (Ergebnis: $\frac{\pi}{2e}$). Es ist allerdings anzunehmen, daß DERIVE im Lauf der Zeit weiter ausgebaut werden wird.

Weitere Beispiele zu DERIVE findet man bei WINKELMANN (1989, S. 394ff).

3 Rückblick auf den Taschenrechner

3.1 Der nichtprogrammierbare Taschenrechner

Möchte man Voraussagen machen, wie Unterrichtsverwaltung und Mathematiklehrer(innen) auf Computeralgebra-Programme reagieren werden, kann man sich zurückerinnern, wie auf den Taschenrechner reagiert wurde. Dieser wurde

- zuerst totgeschwiegen (Stufe 1),
- dann verboten (Stufe 2),
- mit Widerwillen erlaubt (wenn ... und aber) (Stufe 3) und
- schließlich verpflichtend eingeführt (zur Zeit ab der 7. Schulstufe) (Stufe 4).

[2]Die Notation wurde der üblichen angeglichen, daher wurde „i" und „e" geschrieben.

[3]Stephen WOLFRAM, der Autor von MATHEMATICA, veröffentlichte seine erste Arbeit mit 16 und machte seinen Doktor am California Institute of Technology mit 20.

Analog ist es beim programmierbaren Taschenrechner. Da steht die Unterrichtsverwaltung bei Stufe 3, in der Computeralgebra hingegen noch bei Stufe 1. Dabei gibt es bereits Taschenrechner, wie etwa den CASIO FX 5500, die zumindest algebraische Ausdrücke vereinfachen können.

Dabei ist die Unterrichtsverwaltung fortschrittlicher als manche Kolleginnen und Kollegen. So wurde der Taschenrechner noch im Schuljahr 1985/86 im ORG Kundmanngasse, Wien 3 in einer 7. Klasse verboten, dort mußte statt mit ihm mit dem Logarithmenbuch gerechnet werden. Und - Ordnung muß sein - auch im Jahr vorher bei den trigonometrischen Berechnungen.

Aber auch aus der Bundesrepublik Deutschland hört man ähnliches: So berichtete Univ. Prof. Dr. SCHWARTZE auf der Bundestagung für Didaktik der Mathematik 1989 in Berlin, daß in über der Hälfte der von ihm in Hessen untersuchten Gymnasien auf der 10. Schulstufe kein Taschenrechner verwendet wurde (Schuljahr 1987/88)[4]. (Diese Bemerkungen fielen im Vortrag und sind im schriftlichen Beitrag (1989, S. 342f) leider nicht enthalten.)

Ich bedaure dieses Ablehnen des Taschenrechners, denn ich finde, daß es im Gegensatz dazu viel besser wäre, ihn zum Thema des Unterrichts zu machen, wie etwa die 1. Ableitung näherungsweise berechnen zu lassen (welchen Wert soll man da für Δx nehmen?) oder den Unterschied zwischen Konvergenz und „Taschenrechnerkonvergenz" herausarbeiten zu lassen; denken Sie etwa an die harmonische Reihe (nicht konvergent, aber TR-konvergent) oder an e^{-10} (konvergent, nicht TR-konvergent, wenn man unter TR-Konvergenz versteht, daß das Ergebnis vom Typ des verwendeten Taschenrechners unabhängig sein soll).

Ein anderes interessantes Problem, das man behandeln könnte, ist das Studium von Approximationsverfahren. So kann die Gleichung $x^2 + 3x - 5 = 0$ durch

$$x = \frac{5 - x^2}{3} \qquad \text{mit} \qquad x_0 = 1$$

iterativ gelöst werden. Das funktioniert dann auch (vielleicht! Wann nicht?) für Gleichungen höheren Grades u.s.f.[5]

Ich sehe ein, daß es ärgerlich ist, wenn bereits für einfachste Rechnungen der Taschenrechner benutzt wird, denn ich finde es immer noch als ein erstrebenswertes Ziel nicht nur die einfachsten, sondern auch ein wenig schwerere Aufgaben im Kopf zu lösen. Es ist ja auch nicht schlecht, wenn man trotz eines Führerscheins noch die Beine benützen kann. Mir erklärten dazu Mathematikstudent(inn)en, daß sie in der Schule bei Prüfungen und Schularbeiten zwar auch für einfache Rechnungen den Taschenrechner verwendet haben, denn da sei das richtige Resultat wichtig, anders war es hingegen bei Hausübungen. Dort hätten sie nur

[4] Aber auch mehr als die Hälfte der Schüler war nicht imstande cm^3 in dm^3 umzuwandeln!

[5] Wenn Sie das Thema interessiert, finden Sie im Artikel von PECH (1989) weitere Anregungen.

selten den Taschenrechner benutzt. Ich würde meinen, daß man besser andere Beispiele geben sollte, wo man den Taschenrechner nicht so ohne weiteres einsetzen kann, soferne er nicht Thema des Unterrichts ist. So gab ich folgendes Beispiel zur Reifeprüfung:

Bsp.: Von einer Trafostation T, die an einer geraden Straße steht, soll ein Stromkabel zu einem Haus H verlegt werden. Die kürzeste Entfernung des Hauses von der Straße beträgt 1600 m, die Luftlinie Haus-Trafostation 2 km. Die Kosten der Leitung betragen längs der Straße a S pro m und querfeldein b S pro m.

a) Berechnen Sie bitte, wie die Leitung zu verlegen ist, damit die Kosten minimal werden! Bei welchem Verhältnis a:b ist die Verlegung längs der Luftlinie und wann längs der Straße und der Normalen zum Haus günstiger?

b) Berechnen Sie bitte für a=150 S/m und b=250 S/m die Minimalkosten und die Kosten der beiden anderen Möglichkeiten!

3.2 Programmierbare Taschenrechner

Ähnlich denke ich auch über den programmierbaren Taschenrechner. Auch er bietet die Chance, den Mathematikunterricht zu verbessern.

Da alle Schüler, die die Oberstufe einer allgemeinbildenden oder berufsbildenden höheren Schule besuchen, Informatik (bzw. einen diesen entsprechenden Gegenstand) haben, möchte ich dringend empfehlen, anstelle des gewöhnlichen Taschenrechners einen programmierbaren verwenden zu lassen. Schließlich sollte man das, was man in einem Unterrichtsgegenstand (hoffentlich) gelernt hat, in einem anderen verwenden können. Insbesondere hoffe ich mir durch diese Maßnahme mehrere positive Auswirkungen auf den Mathematikunterricht:

1. Konzentration auf den mathematischen Inhalt der Probleme durch Wegfall sinnloser Rechnungen, wie etwa Zurückdrängen der Kurvendiskussionen auf ein sinnvolles Maß.

2. Vielleicht auch statt Vermittlung eines möglichst lückenlosen Katalogs an Detailwissen - von solchen Kenntnissen sagte WAGENSCHEIN: „Die Halbwertszeit ist äußerst kurz“ (1973, S. 392) - der „Vorrang des Verstehens“ (ebendort).

3. Stärkeres Hereinnehmen numerischer Verfahren wie etwa das oben angeschnittene Approximationsverfahren.

Bezüglich des Zurückdrängens der Kurvendiskussionen ist es meines Erachtens zwar wichtig, Kurven zu zeichnen, aber vor allem deswegen, damit man die Bedeutung der verschiedenen Parameter erkennen lernt, anstatt der Reihe nach Wertetabellen, Nullstellen und Extrema berechnet (siehe auch HANISCH 1985a). Ich ziehe daher Beispiele der folgenden Art vor, das ich in ähnlicher Form zur nächsten Reifeprüfung geben werde:

Bsp.: Gegeben sei die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{x - ax^2}{x^2 - b} .$$

Welche Bedeutung hat a, welche hat b?
Für welche Werte ergeben sich andere Schaubilder? Skizzieren Sie bitte diese!

Sehr hilfreich dazu sind Programmpakete, wie etwa die von GROSSER und RUPPRECHT (1987) für die Schule entwickelten Basic-Mathematikprogramme.

In diese Gruppe würde ich auch die Rechner mit eingebauter Tabellenkalkulation stellen. Leider sind sie derzeit noch etwas zu teuer, um sie in der Unterstufe einzuführen; dabei ist die Tabellenkalkulation ein hervorragendes Mittel um zu zeigen, wie sich die Änderung einer Rechengröße auf die anderen auswirkt. Daher bleibt derzeit - wie bei der Computeralgebra - nur der Weg ins PC-Labor.

4 Computeralgebra: Erfahrungen und Stellungnahmen

„Symbolic mathematical programmes (so-called computer algebra systems) are now well-established as research tools in many areas of science and engineering... However, in spite of the wide availability of these symbolic systems, they seem to have had little effect up to now on the actual teaching of mathematics" (HODGSON, B.R. 1987, S. 55).

Dies ist umsomehr verwunderlich, da „Computer algebra makes a highly motivating introductory computer programming course for math, science and engineering students. Computer algebra is also an ideal principal language for such students, because numbers and arithmetic comprise appreciably less then half of the kindergarden to calculus math curriculum. Moreover, the limited-precision integer and floating-point arithmetic typical of traditional programming languages is not the kind of arithmetic taught in this curriculum or used in everyday life" (muSIMP/muMATH-80 1980, S. 11-1).

Derselben Ansicht ist auch NEUWIRTH (1987, S. 51): „Computer algebra makes it possible to teach mathematics in such way that we can concentrate on showing how we can formalize a primarily unstructured problem, because we can concentrate on setting up the equations, instead of manipulating them. Of course, this should not have the consequence that we do not teach ‚the core' of mathematics any more. But perhaps we can concentrate more on principles than on technical details."

Ein anderes Problem beleuchtet BARRY (1989, S. 769): „Powerfull computer algebra systems such as Mathematica[6], MACSYMA, Reduce, and Scratchpad allow mathematicians to play with exact algebraic and analytic expressions, which the computer, like a dull but industrious student, treats as meaningless strings of symbols subject to mysterious rules and operations. Much as pocket caculators alleviate the pain of filling out tax forms, algebraic processors take the tedium an worry out of long, complicated derivations."

Schon 1985 schreiben BECKER und ENGEL (1985, S. 221): „Der Einfluß eines SAM[7]-Rechners auf den Gymnasialunterricht könnte beträchtlich sein. Denn ab der 8. Klasse [gemeint ist hier die Schulstufe] wird immer weniger numerisch und immer mehr symbolisch gerechnet. Symbolisches Rechnen ist aber genau das, was der übliche Rechner nicht kann." Derselben Ansicht ist WEISSENBÖCK (1986, S. 215): „Programme wie das beschriebene Paket muMATH können den algebraischen Teil des Mathematikunterrichts ähnlich verändern wie der Taschenrechner den numerischen Teil verändert hat. Der Vorführung dieser Programme im Unterricht steht fast nichts mehr im Wege: Geräte sind an vielen Schulen schon vorhanden, und auch der Preis der Programme ist erschwinglich ... Für den privaten Gebrauch durch den Schüler liegt der Preis allerdings noch relativ hoch. Da aber Schüler (erfreulicherweise) oft auch außerhalb des Unterrichts Zugang zu komfortablen Rechnersystemen der Lehranstalten haben, wird das Interesse an diesen Programmen sehr steigen. Daher muß von den Mathematiklehrkräften diese neue Herausforderung angenommen werden: die neuen Werkzeuge, die die Datenverarbeitung bietet, dürfen nicht als Konkurrenz zum Unterricht angesehen werden, sondern müssen als dessen sinnvolle Ergänzung dienen."

Interessant ist auch die Stellungnahme von HERGET (1989, S. 5) auf die Frage, ob der Computer alle Probleme der Mathematik lösen kann: „Die Antwort auf diese suggestive Frage ist natürlich: Nein. Sicherlich werden wir dem Computer immer mehr Tätigkeiten übertragen können, und schon in wenigen Jahren werden auch Taschenrechner mit kleinen Bildschirmen und fertigen Funktionsgraphen-Programmen ausgestattet sein[8], algebraische Termumformungen beherrschen und formal differenzieren können. Aber der kreative, phantasievolle, neugierige Mensch wird auch dann noch (vielmehr: gerade dann) gefragt sein, denn der Rechner nimmt uns lediglich die lästige Routinearbeit ab, das andere, das viel Wichtigere

[6]Die unterschiedlichen Hervorhebungen sind im Original.

[7]=Symbolisch-algebraische Manipulation (Anm.d.Verf.)

[8]Solche sind schon längst am Markt, wie etwa der CASIO FX 7000 G! (Anmerkung des Verf.)

bleibt weiter unsere Aufgabe.
Wenn es aber so ist, daß der Computer in immer größerem Maße die rein kalkülhafte Rechenarbeit (im oben angedeuteten sehr weit gesteckten Rahmen) übernehmen kann, dann wird das Einüben solcher Fertigkeiten im Mathematikunterricht eine immer geringere Rolle spielen. Statt dessen müssen verstärkt bisher unterrepräsentierte Fähigkeiten vermittelt werden, die auf absehbare Zeit nicht Maschinen übertragen werden können: wie Mathematisieren, Problemlösen, Anwenden, Formalisieren."

Unterrichtserfahrungen mit Computeralgebra-Programmen liegen ebenfalls bereits vor: So berichtete HEUGL (1989, S. 49) über einen Schulversuch mit Rechnern des Typs HP-28C mit Schülern der 6. Klasse, bei dem allerdings seine hochgesteckten Erwartungen nicht erfüllt wurden. Meiner Ansicht liegt das vor allem darin, daß die Benutzeroberfläche des HP-28C nur kommandogesteuert ist und sich nicht mit der menügesteuerten von DERIVE vergleichen läßt, so daß das Erlernen des Handlings für viele Schüler(innen) viel zu aufwendig war.

Faßt man die Stellungnahmen zusammen, so ist deren Tenor, daß Computeralgebra-Programme entsprechende Auswirkungen auf den Mathematikunterricht haben werden und zwar wird einerseits das Formale Rechnen zugunsten anderer Fertigkeiten zurückgedrängt werden, andererseits stehen auch mehr Möglichkeiten offen.

5 Auswirkungen der Computeralgebra auf den Mathematikunterricht

Um die Auswirkungen der Computeralgebra-Programme detailierter auf den Mathematikunterricht zu studieren, sollen die verschiedenen Möglichkeiten, die sie bieten, soweit sie den Mathematikunterricht betreffen, zusammengefaßt werden. Diese sind:

1. exakte Arithmetik,
2. komplexe Arithmetik,
3. Umformen algebraischer Terme,
4. Lösen von Gleichungen,
5. Matrizenrechnungen,
6. Differential- und Integralrechnung,
7. Differentialgleichungen,
8. Definieren eigener Funktionen und
9. Herstellen von Grafiken.

Im Folgenden sollen nun die Auswirkungen auf eben diese Gebiete studiert werden.

5.1 Exakte Arithmetik

Die Möglichkeit exakt numerisch zu rechnen (siehe Abschnitt 2), bietet gegenüber dem Taschenrechner den Vorteil, daß den Schüler(innen) viel stärker der Unterschied zwischen exaktem Wert und Näherungswert bewußt wird. Derzeit empfinden sie zwischen $\sqrt{2}$ und $1,414213562$ keinen Unterschied, geschweige den, daß sie das prinzipiell Verschiedene zwischen diesen Zahlen spüren. Es wird die Schulmathematik dadurch, daß die Möglichkeit exakten numerischen Rechnens besteht, zwar nicht leichter, weil bewußt von Fall zu Fall entschieden werden muß, ob mit dem exakten Wert oder dem Näherungswert gerechnet werden soll, die Schüler(innen) erhalten aber mehr Einsicht in die Beziehungen von Zahlen und deren Näherungen. Es gibt dann auch keinen Unterschied mehr zwischen Konvergenz und Computer-Konvergenz (siehe Abschnitt 3.1).

Zweitens erkennen die Schüler(innen), daß die Beschränkung auf Fließkommazahlen mit einer bestimmten Stellenzahl nicht von der Computer-Hardware aufgezwungen ist, sondern daß es sich dabei um ein Software-Problem handelt, was bisweilen auch Mathematik-Didaktikern nicht selbstverständlich ist[9].

Drittens können durch exaktes numerisches Rechnen auch schlecht konditionierte Gleichungssysteme ohne größere Schwierigkeiten gelöst bzw. ebensolche Matrizen invertiert werden (siehe dort).

5.2 Komplexe Arithmetik

Durch den Einsatz von Computeralgebra-Programmen können wesentlich tiefere Probleme, in denen komplexe Zahlen auftreten, behandelt werden. Die Änderung zum derzeitigen Mathematikunterricht wird wahrscheinlich genauso weitreichend sein, wie die, durch den Taschenrechner in der Schul-Trigonometrie bewirkte. Während früher in einem Schularbeitsbeispiel nur die Auflösung eines einzigen Dreiecks verlangt wurde, da das Aufschlagen und Zurückschlagen der Logarithmen unverhältnismäßig viel Zeit beanspruchte, sind jetzt an ungleich mannigfaltigeren Gebilden Berechnungen anzustellen.

[9] Originalzitat: „Jeder Computer hat per Konstruktion seine Grenzen im numerischen Bereich; durch seine beschränkte Stellengenauigkeit kann er oft nur Näherungswerte liefern, womit ein offensichtlicher Gegensatz zu den Erfordernissen der Analysis mit ihren infinitesimalen Prozessen besteht" (MADINCEA 1989, S. 34).

5.3 Umformen algebraischer Terme

Wie BECKER und ENGEL (1985) sowie WEISSENBÖCK (1986) (siehe Abschnitt 4) hingewiesen haben, werden vor allem im Bereich der Algebra die größten Veränderungen gegenüber dem derzeitigen Mathematikunterricht eintreten. Es wird genauer didaktischer Analysen bedürfen, festzustellen, was unverzichtbarer Teil des Mathematikunterrichts ist, bzw. was weggelassen werden kann. Inwieweit sollen die Schüler(innen) die Computeralgebra als Black-Box verwenden (analog den trigonometrischen Funktionen am Taschenrechner), welche algebraischen Umformungen sollen sie beherrschen (analog dem Multiplizieren zweistelliger Zahlen)?

Diese Überlegungen dürfen nicht nur von einem mathematischen Standpunkt aus geführt werden, sondern es sind insbesondere dabei auch die latenten Leistungsdimensionen (siehe HANISCH und SCHWENDENWEIN 1986, S. 722ff u. 1990, S. 39ff) im Auge zu behalten. Mathematik wird nicht nur der Mathematik wegen unterrichtet.

5.4 Lösen von Gleichungen

Ähnliches wie im vorigen Abschnitt gilt auch für das Lösen von Gleichungen, hängt dies doch im jetzigen Mathematikunterricht sehr stark mit dem Umformen von Termen zusammen. Bedenkt man, daß viele Computeralgebra-Programme auch die Möglichkeit enthalten, Gleichungen näherungsweise zu lösen, dies im allgemeinen jedoch nicht geht, wenn die Koeffizienten auch Variable sind, ergeben sich daraus interessante neue mathematische Fragestellungen, die entsprechend didaktisch aufbereitet werden müssen.

Andererseits werden aber im künftigen Mathematikunterricht realistischere Beispiele als bisher behandelt werden können, was den Interessen vieler Schüler(innen) besser entspricht als die jetzigen Probleme, die oft sehr gekünstelt wirken.

Auch beim Lösen von Gleichungen wird eine genaue mathematische Analyse einzusetzen haben, die herausarbeitet, was unverzichtbarer Teil bleiben soll. Ohne einer solchen vorgreifen zu wollen, bin ich der Ansicht, daß Schüler nach wie vor

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

auflösen können sollen oder imstande sein müssen, die Lösungsmenge von

$$x^2 + 3ax = 10a^2$$

zu finden.

5.5 Matrizenrechnungen

Bislang hat die Matrizenrechnung in der Schule wenig Bedeutung, steigt doch der Rechenaufwand überproportional stark mit der Anzahl der Spalten und Zeilen der verwendeten Matrizen an. Steht hingegen ein Instrument zur Verfügung, mit dessen Hilfe Matrizenoperationen schnell und einfach durchgeführt werden können, wo auch Matrizen mit Variablen und wegen der exakten Arithmetik auch schlecht konditionierte Matrizen ohne größere Schwierigkeiten in die Rechnung eingehen können, werden sich Matrizendarstellungen mehr und mehr durchsetzen. Das gilt insbesondere bei linearen Gleichungssystemen, in der Vektorrechnung[10] und in der Statistik.

Für die Vektorrechnung wird die Computeralgebra in etwa dieselbe Veränderung bewirken wie der Taschenrechner für die Trigonometrie. Es werden die gestellten Aufgaben wesentlich komplexer werden, es werden Anwendungen in der Wirtschaft hereingenommen werden und diese werden die Beschränkung auf drei Dimensionen sprengen. Statistik und Vektorrechnung wird wesentlich mehr verzahnt werden.

Wie oben erwähnt, lösen Computeralgebra-Programme Gleichungssysteme, in denen als Koeffizienten auch Variable auftreten können. Wie schon NEUWIRTH (1978, S. 52) darauf hingewiesen hat, tritt dabei das Problem auf, daß die Determinante 0 sein kann. Gerade dies gibt aber Anlaß Fallunterscheidungen vorzunehmen, wie man sie etwa für quadratische Gleichungen schon heute in Lehrbüchern findet (siehe REICHEL u.a. 1990, S. 96ff.).

5.6 Differential- und Integralrechnung

Auch in der Differential- und Integralrechnung wird der formale Aspekt zugunsten eines inhaltlichen abnehmen. Vielleicht wird man dann ein anderes Untersuchungsergebnis erhalten, wenn Personen, deren Reifeprüfung länger als fünf Jahre zurückliegt, gefragt werden, was sie noch über das Differenzieren wissen. Sie gaben bei der Befragung (HANISCH 1985b) Antworten wie etwa „Das ist das mit dem Strich." oder „Es gibt eine Formel

$$\frac{u'v - v'u}{?}$$

und eine innere und eine äußere Ableitung - aber wozu das gut ist, weiß ich nicht." oder „Damit habe ich nie etwas anfangen können." oder „Das ist das, was ich nie gekonnt habe." Interessant war, daß zwar teilweise noch einzelne Formeln in der Erinnerung waren, aber wozu diese gehörten, was man damit tut, das wurde nicht gewußt.

[10] Es wird hier bewußt der Ausdruck „Lineare Algebra" vermieden, da in der Schule auch Kegelschnitte etc. behandelt werden.

Daher erwarte ich mir vom Zurückdrängen des Formalen eine wesentliche Bereicherung des Mathematikunterrichts. An Lehrstoff werden Funktionen mit mehr Variablen und somit auch das Partielle Differenzieren in die AHS Eingang finden, da „die Einschränkung auf stets eine Variable ... auch allgemein das ‚eindimensionale' funktionale Denken [fördert], das oft zu Mißerfolgen führt" (REICHEL u.a. 1989, S. 267).

5.7 Differentialgleichungen

Differentialgleichungen führen derzeit in der allgemeinbildenden höheren Schule ein Schattendasein, würden sich aber sehr gut dazu eignen, verschiedene Prozesse zumindestens näherungsweise zu beschreiben. Das Einführen einer Computeralgebra, die zumindest einfachere Differentialgleichungen lösen kann, wird dem Anwendungsaspekt im Mathematikunterricht zu Gute kommen, der etwa in einem Schulbuch der 5. Klasse sträflich vernachlässigt wird[11].

Das Behandeln von Differentialgleichungen wird vor allem dann noch wesentlich einfacher werden, wenn in die Computeralgebra-Programme Fähigkeiten, wie sie etwa STELLA[12] besitzt, eingebaut werden.

5.8 Herstellen von Grafiken

Die Fähigkeit zwei- und dreidimensionale Grafiken herzustellen, wird es ermöglichen, die Schüler (innen) wesentlich mehr als bisher in der Mathematik experimentieren zu lassen. So können die in Abschnitt 3.1 und 3.2 gestellten Aufgaben auch experimentell am Bildschirm gelöst werden[13]. Oder man betrachtet die Lösung einer Differentialgleichung, variiert die Parameter usw.

Dies wird eine weitgehende Änderung des bisherigen Mathematikunterrichts darstellen, da in „der derzeitige[n] Praxis des Mathematikunterrichts ... mechanisch nach fixen und vorgegebenen Regeln ableitbare Rechen- und Lösungsverfahren" im Vordergrund stehen (DÖRFLER u. BLOOM 1989, S. 177).

Die dreidimensionale Grafik wird es auch erleichtern, Funktionen mit mehr Variablen zu behandeln. Es gibt bereits Computeralgebra-Programme, die es gestatten, das räumliche Gebilde am Bildschirm um jede der drei Achsen zu drehen.

[11] In ihm fehlt das komplette im Lehrplan vorgeschriebene Kapitel „Darstellen und Analysieren von Daten- und Beziehungsstrukturen", das besonders anwendungsträchtig ist.

[12] Mit diesem Programm werden Differentialgleichungen durch Zeichnen der Abhängigkeiten am Bildschirm gelöst.

[13] Dann sind es allerdings keine Reifeprüfungsaufgaben mehr.

5.9 Definieren eigener Funktionen

Von dieser Fähigkeit der Programme werden all jene Bereiche des Mathematikunterrichts erfaßt werden, für die feste Algorithmen zur Verfügung stehen. Diese können im allgemeinen als feste Formeln (auch mit Formvariablen und exakter Arithmetik) definiert werden. Das Anwenden derselben wird ebenfalls den Schwerpunkt vom Formalen zum Inhaltlichen verschieben.

6 Folgerungen

Betrachten wir die typischen Schulbeispiele, so können wir sie grob in zwei Bereiche einteilen:

- Beispiele, die rein formale Dinge behandeln, wie etwa[14]
  Zerlege in ein Produkt von Linearfaktoren: $x^2 - 4x - 21$! und
- Beispiele, die auf inner- oder außermathematische Anwendungen hinzielen, wie etwa:
  Gibt es Zahlen, die ihrem Kehrwert gleich sind? Oder:
  Ein Schiff fährt stromabwärts mit a Knoten, stromaufwärts mit a/3 Knoten. Berechne in Abhängigkeit von a die Eigengeschwindigkeit des Schiffes und die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers! Für welche a ist die Aufgabe (eindeutig) lösbar?

Das Lösen der Aufgaben der zweiten Gruppe läuft in drei Abschnitten ab[15]:

1. Übersetzen des Problems in eine geeignete mathematische Darstellungsform, wie
   - Aufstellen einer (Un-)Gleichung, eines (Un-)Gleichungssystems etc.,
   - Zeichnen einer geeigneten graphischen Darstellung,
   - Entwickeln einer Beweisidee etc.
2. Umformen dieser Darstellungsformen durch geeignete mathematische Operationen wie
   - numerisches Rechnen (ev. auch mit komplexen Zahlen),
   - Umformen algebraischer Terme,
   - Lösen von Gleichungen (auch graphisch),

[14]Die Angaben der folgenden Beispiele stammen aus dem Lehrbuch für die 5. Klasse AHS von REICHEL u.a. (1990).

[15]Siehe hinzu auch FISCHER, MALLE u. BÜRGER (1985, S. 89)

- Matrizenrechnungen,
- Differenzieren und Integrieren (auch graphisch)
- Durchführen eines Beweises etc.

3. Interpretieren der so erhaltenen Ergebnisse und Überprüfen derselben.

Der zweite Schritt, das Durchführen der mathematischen Operationen, was zur Zeit das Hauptanliegen der Schulmathematik ist, kann größtenteils einem Computeralgebraprogramm überlassen werden. Den ersten und dritten Schritt, das Modellieren und das Interpretieren hingegen werden Computer noch lange nicht durchführen können, meines Erachtens nie, denn „alle Überlegungen sprechen dafür, daß auch der beste Computer nicht in der Lage sein wird, die Komplexität menschlichen Denkens abzubilden" (SCHIERSMANN 1989, S. 86). „Computer reagieren schnell, genau und voraussagbar. Doch gerade die Eigenschaften, in denen sie uns überlegen sind, machen das Wesen der menschlichen Intelligenz nicht aus. Weit wichtiger sind unsere Fähigkeiten, wahrzunehmen, zu verknüpfen und intuitiv zu wissen" (DREYFUS u. DREIFUS 1987, S. 2).

Der herkömmliche Mathematikunterricht wird sich ändern müssen. „Ob" liegt nicht in unserer Entscheidungsgewalt, hingegen über das „Wie" können wir jetzt noch mitbestimmen.

Literatur

1. BARRY, A.C.: Do Mathematicans Still Do Math. In: Science Vol.244, Feb. 1989, p. 769–770.

2. BECKER, W. u. ENGEL, A.: muMATH/muSIMP-80. In: Didaktik der Mathematik. S. 205–221, Heft 3, 1985.

3. DERIVE, A Mathematical Assistant. Software House Inc., Honolulu 1988. Vertrieb durch CIFEG Inc., Kalkgruberweg 26, A-4040 Linz.

4. DÖRFLER, W. u. BLOOM, W.: Bericht über die Arbeitsgruppe „Auswirkungen auf die Schule". In: MAAß, J. u. SCHLÖGLMANN, W.: Mathematik als Technologie? S. 174–189, Weinheim 1989.

5. DREYFUS, H.L. u. DREYFUS, S.E.: Künstliche Intelligenz – Von den Grenzen der Denkmaschine und dem Wert der Intuition. Reinbek 1987.

6. FINN, J.: Enter Mathematica. In: Mac User, Nov. 1988, S. 199–216.

7. FISCHER, R., MALLE, G. u. BÜRGER, H.: Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik. Band 1. Mannheim 1985.

8. GROSSER, S. u. RUPPRECHT, H.: Basic Mathematikprogramme. Mathematik für Schule und Universität. Wien 1987.

9. HANISCH, G.: Gefahren der Visualisierung. In: KAUTSCHITZ, H. u. METZLER, W. (Hrsg.): Anschauung und mathematische Modelle. S. 99–109, Wien 1985a.

10. HANISCH, G.: Was bleibt vom Mathematikunterricht hängen? In: DÖRFLER, W. u. FISCHER, R. (Hrsg.): Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik, S. 75–82. Wien 1985b.

11. HANISCH, G. u. SCHWENDENWEIN, W.: Zum Problem der pädagogischen Leistungsbeurteilung. In: Erziehung und Unterricht, S. 720–732, Heft 10, 1986.

12. HANISCH, G. u. SCHWENDENWEIN, W.: Allgemeinbildende Sekundarschule und neustrukturierte berufliche Bildung – Ein Organisationsmodell für die allgemeinbildenden Schulen der Zehn- bis Achtzehnjährigen unter Berücksichtigung eines sackgassenlosen Berufsausbildungssystems. Band 20 der Reihe Schulentwicklung, Wien 1990.

13. HERGET, W.: Probieren, Entdecken, Forschen im Unterricht – auch mit dem Computer. In: Der Mathematikunterricht, Jg. 35, Heft 4, Juli 1989, S. 5–21.

14. HEUGL, H.: Schulversuch mit einem algebratauglichen Taschenrechner. In: Österreichische Mathematische Gesellschaft (Hrsg.): Didaktik-Reihe, S. 49–54, Heft 17, 1989.

15. HODGSON, B.R.: Symbolic and Numerical Computation: The Computer as a Tool in Mathematics. In: JOHNSON, D.C. a. LOVIS, F. (Hrsg.): Informatics and the Teaching of Mathematics. Proceedings. S. 55–60. Genf 1987.

16. KENNETH, R.F. u. HAIM, H.B.: Symbolic Manipulation Programs for the Personal Computer. In: Science Vol. 243, Feb. 1989, S. 679–684.

17. MADINCEA, A.: Computer können keine Analysis. In: Mathematik lehren. Heft 34, Juni 1989, S. 34–39.

18. NEUWIRTH, E.: The Impact of Computer Algebra on the Teaching of Mathematics. In: JOHNSON, D.C. a. LOVIS, F. (Hrsg.): Informatics and the Teaching of Mathematics. Proceedings. S. 49–53, Genf 1987.

19. PECH, J.: Iterationen und einige Anwendungen. In: Österreichische Mathematische Gesellschaft (Hrsg.): Didaktik-Reihe, S. 94–112, Heft 17, 1989.

20. REICHEL, H-C., MÜLLER, R. u. LAUB, J.: Lehrbuch der Mathematik 5. Wien 1989, 1990^2.

21. REICHEL, H-C., HANISCH, G. u. MÜLLER, R.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Band 1 der Reihe: Mathematik in Schule und Praxis. 304 Seiten, Wien 1987, 1989^2.

22. SCHIERSMANN, CH.: Computer und Interaktionsformen. Folgen für die Familie und die Familienbildung. In: PETSCH, H.-J. u. TIETGENS (Hrsg.): Allgemeinbildung und Computer. S. 79–94, Bad Heilbrunn 1989.

23. SCHWARTZE, H.: Empirische Erhebung von Fehlerarten und -häufigkeiten in der Stereometrie. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1989. Vorträge auf der 23. Bundestagung für Didaktik der Mathematik in Berlin, S. 342–345. Bad Salzdetfurth 1989.

24. WAGENSCHEIN, M.: Der Vorrang des Verstehens. Pädagogische Anmerkungen zum mathematisierenden Unterricht. In: Der mathematisch und naturwissenschaftliche Unterricht (MNU), Heft 7, 1973, S. 385–392.

25. WEISSENBÖCK, M.: Kleinrechner an berufsbildenden Schulen. Mathematikunterricht und künstliche Intelligenz. In: Weg in die Wirtschaft, Folge 378/379, S. 209–215, 1986.

26. WINKELMANN, B.: Didaktische Beschreibung mathematischer Software am Beispiel Derive. Aus: Beiträge zum Mathematikunterricht 1989. Vorträge auf der 23. Bundestagung für Didaktik der Mathematik in Berlin. Bad Salzdetfurth S. 394–397, 1989.

27. WOLFRAM, S.: Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer. Redwood City, California 1988.

28. WOOFF, C. u. HODGKINSON, D.: muMATH: A microcomputer algebra system. London 1988[2].